PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 2
PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

Einige Sätze über die Funktionen mit Matrizenargumenten

EINLEITUNG. In seiner Arbeit [2] hat S. GOŁĄB den zweidimensionalen Flächenmaß im zweidimensionalen Vektorraume charakterisiert. Diese Charakterisierung wurde auf einem Satz über die Funktionen mit Matrizenargumenten gestützt (vgl. [7]). In dieser Note möchte ich diesen Satz auf die Matrizen beliebiger Ordnung verallgemeinern (Satz 6.1). Der Satz 6.1 stellt auch eine Verallgemeinerung des in [4] bewiesenen Satzes dar.

Im § 1 werden die grundlegenden Definitionen und die wichtigsten Bezeichnungen gesammelt. Die Begriffe der ersten und zweiten kanonischen Form einer Matrix werden im § 2 eingeführt. Im § 3 beweise ich einen ziemlich allgemeinen Hilfssatz 3.1 über die kanonischen Formen der Matrizen. Dieser bzw. die Methode seines Beweises kann, meiner Meinung nach, viele Anwendungen sowohl in der Algebra als auch in der Geometrie finden. Einige Folgerungen aus dem Hilfssatz 3.1 sind im § 4 dargestellt. Im § 5 beweise ich zwei Sätze (Satz 5.1 und Satz 5.2) über die Funktionen der Matrizenargumenten. Endlich wird im § 6 gezeigt, wie aus dem Satz 5.2 die oben erwähnte Verallgemeinerung des Satzes von S. GOŁĄB (Satz 6.1) folgt.

Die Sätze 5.1 und 5.2 bestimmen gleichzeitig die allgemeine Lösung gewisser Funktionalgleichungen.

§ 1. Es sei $\tilde{M}$ die Menge aller quadratischen Matrizen der Ordnung n über dem beliebigen vertauschbaren Zahlkörper K. Mit M (ohne Schlange) wird die Untermenge von $\tilde{M}$ bezeichnet, die aus allen Matrizen mit nichtverschwindenden Determinanten besteht. Die Matrizen von $\tilde{M}$ werde ich mit grossen lateinischen Buchstaben, A, B, X, Y usw. und ihre Elemente mit entsprechenden kleinen, zB.

$$A = ||a^i_k||, \qquad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

bezeichnen.

Jetzt definiere ich die sogenannten elementaren Umformungen der Matrizen (vgl. [3], [4], [5]).

DEFINITION 1.1. Folgende Umformungen der Matrizen werden die elementaren Umformungen genannt:

T_1: Multiplizieren einer Spalte (Zeile) mit einer beliebigen Zahl und Addieren zu einer anderen Spalte (Zeile).

T_2: Multiplizieren einer Spalte (Zeile) mit einer von Null verschiedenen Zahl ϱ.

Bemerkung. *Die Umformung T_2 ist von derjenigen in* [3] *bzw.* [5] *definierten verschieden.*

Da ich die Umformungen T_1 bzw. T_2 nur für die Spalten bzw. nur für die Zeilen anwenden will, führe ich für diese die folgenden Bezeichnungen ein. Die Umformung T_α, die nur die Spalten (Zeilen) betrifft, wird mit $T_\alpha S(T_\alpha Z)$, $\alpha = 1, 2$, bezeichnet.

§ 2. In diesem Paragraphen werden die erste und die zweite kanonische Form der Matrizen definiert.

Es sei

$$D = \|d_a^i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \; a = 1, 2, \dots, m,$$

eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir setzen voraus, daß D von der Nullmatrix 0 verschieden ist,

$$D \neq 0, \tag{2.1}$$

und daß die von Null verschiedenen Elemente von D in p ersten Spalten dieser Matrix auftreten. Mit $d_k^{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, p$, wird das erste von Null verschiedene Element der k-ten Spalte bezeichnet.

Weiter setzen wir voraus, daß die Folge $i_1, \dots, i_{i_p}$ streng wachsend ist,

$$i_1 < i_2 < \dots < i_p. \tag{2.2}$$

Die Zahl p erfüllt offensichtlich die Ungleichungen $1 \leqslant p \leqslant m$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$p < m \tag{2.3}$$

und

$$p = m. \tag{2.4}$$

Falls p kleiner als m ist, sind alle Spalten mit den grösseren als p Indizes, wegen (2.2), aus Nullen gebildet. Dann wird noch vorausgesetzt, daß

$$d_k^{i_k} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{2.5}$$

ist.

Falls p gleich m ist, nehmen wir an, daß die Bedingungen

$$\begin{cases} d_k^{i_k} = 1, & k = 1, 2, \dots, m-1, \\ d_m^{i_m} = d \neq 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

gelten.

Definition. Wir sagen, daß die Matrix D die erste kanonische Form hat, wenn sie (2.2), (2.3) und (2.5) erfüllt. D hat die zweite kanonische Form, wenn sie (2.2), (2.4) und (2.6) erfüllt. Die erste kanonische Form wird mit D_1 und die zweite mit $D_2(d)$ bezeichnet, wo d dieselbe Zahl ist, die in (2.6) auftritt.

§ 3. Jetzt wird ein Hilfssatz über die kanonischen Formen beliebiger Matrizen bewiesen, der im weiteren nötig ist.

HILFSSATZ 3.1. *Jede von Null verschiedene Matrix X mit n Zeiien und m Spalten kann nur mit Hilfe der Umformungen $T_1 S$ entweder auf die erste kanonische Form D_1, wenn der Rang von X kleiner als m ist, oder auf die zweite $D_2(d)$, ween der Rang von X gleich m ist, zurückgeführt werden.*

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß jede von Null verschiedene einspaltige Matrix die zweite kanonische Form hat. Es genügt mit $x_1^{i_1}$ das erste von Null verschiedene Element dieser Matrix zu bezeichnen und als d anzunehmen.

Der Hilfssatz 3.1 wird mit Hilfe der vollständigen Induktion hinsichtlich der Anzahl der Spalten bewiesen. Es wird also vorausgesetzt, daß er für alle Matrizen mit $(m-1)$ Spalten, $m \geqslant 2$, gilt. Ich werde zeigen, daß er für Matrizen mit m Spalten auch erfüllt ist.

Es sei X eine Matrix mit m Spalten. Wir bezeichnen mit i_1 die erste Zeile der Matrix X, in der wenigstens ein von Null verschiedenes Element existiert. Da X von Nullmatrix verschieden ist, existiert ein solcher Index i_1 sicher. Es ist also

$$x_k^i = 0, \qquad 1 \leqslant i < i_1, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.1}$$

und es gibt einen Index k_1 derart, daß

$$x_{k_1}^{i_1} \neq 0. \tag{3.2}$$

Man kann voraussetzen, daß k_1 von 1 verschieden ist.

$$k_1 > 1. \tag{3.3}$$

Andernfalls genügt es die erste Spalte zu irgendeiner anderen zu addieren.

Multiplizieren wir jetzt die k_1-te Spalte mit

$$(1 - x_1^{i_1}) : x_{k_1}^{i_1}$$

und addieren zu der ersten, so nimmt das in der ertsen Spalte und in der i_1-ten Zeile stehende Element den Wert 1 an,

$$x_1^{i_1} = 1. \tag{3.4}$$

Durch Multiplizieren der ersten Spalte mit $(-x_k^{i_1})$, $k > 1$, und Addieren zur k-ten kann man erreichen, daß alle Elemente der i_1-ten Zeile, die in den Spalten $2, 3, \ldots, m$ stehen, gleich Null sind,

$$x_k^{i_1} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, m. \tag{3.5}$$

Die soeben erhaltene Matrix wird mit $\underset{1}{X}$ bezeichnet. Sie erfüllt die Bedingungen (3.1), (3.4) und (3.5). Überdies entsteht $\underset{1}{X}$ aus der Matrix X mit Hilfe nur der Umformungen $T_1 S$. Wir bezeichnen jetzt mit X' die Matrix, welche aus den Spalten $2, 3, \ldots, m$ der Matrix X gebildet ist. Ist X' eine Nullmatrix, dann hat $\underset{1}{X}$ die erste kanonische Form ($p=1$). Man kann also voraussetzen, dass X' von Nullmatrix verschieden ist,

$$X' \neq 0. \tag{3.6}$$

Aus (3.6) und der Voraussetzung des Induktionsschrittes kann X' auf die kanonische Form nur mit Hilfe der Umformungen T_1S zurückgeführt werden. Es seien $i_2', \ldots, i_p'$ die Indizes der Zeilen, welche diese kanonische Form bestimmen. Wegen (3.5) muß

$$i_1 < i_2'$$

sein. Die Matrix $\tilde{X}$, die aus der ersten Spalte von $\underset{1}{X}$ und aus den (m−1) Spalten von X' gebildet ist, hat die kanonische Form. Ihre Indizes $i_1, \ldots, i_p$ werden folgendermaßen

$$i_1 = i_1, \qquad i_2' = i_2, \ldots, \qquad i_p = i_p',$$

definiert. Überdies erhält man $\tilde{X}$ aus X nur mit Hilfe der Umformungen T_1S. Auf Grund der vollständigen Induktion ist der erste Teil des Hilfssatzes 3.1 bewiesen.

Da der Rang der Matrix bei der Umformung T_1S invariant ist, haben die Matrix X und ihre kanonische Form den gleichen Rang. Der Rang der ersten kanonischen Form ist kleiner als m, der zweiten dagegen ist gleich m .X hat also dann und nur dann die erste kanonische Form, wenn ihr Rang kleiner als m, und die zweite, wenn ihr Rang gleich m ist. Auf dieser Weise ist unser Beweis beendet.

§ 4. Für die quadratischen Matrizen X der Ordnung n erhalten wir aus dem Hilfssatz 3.1 als Spezialfall den Hilfssatz von E. Artin [1], S. 152 (vgl. [6], S. 207). Dieser wird in der nachstehenden Form ausgedrückt, die für unsere Zwecke die bequemste ist.

Hilfssatz 4.1. *Jede nichtsinguläre quadratische Matrix X kann mit Hilfe der Umformungen T_1S auf die folgende diagonale Form*

$$D = \{1, 1, \ldots, d\}, \qquad d = \operatorname{Det} X, \tag{4.1}$$

zurückgeführt werden.

Beweis. Da der Rang der Matrix X gleich der Anzahl der Spalten $n=m$ ist, wird X auf Grund des Hilfssatzes 3.1 nur mit Hilfe von T_1S auf die zweite kanonische Form $D_2(d)$ zurückgeführt. In diesem Falle muß aber jede Zahl i_k gleich k für $k=1, 2, \ldots, n$, sein. Andernfalls wäre $D_2(d)$ singulär, was unmöglich ist. $D_2(d)$ ist also eine untere dreieckige Matrix [1]), welche die folgenden Elemente

$$d_k^k = 1, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$d_n^n = d,$$

auf der Hauptdiagonale hat. Mit Hilfe von T_1S kann man jede solche Matrix auf die diagonale Matrix D zurückführen. Da sich bei T_1S die Determinante der Matrix nicht ändert, muss d der Determinante von X gleich sein. Somit ist der Hilfssatz 4.1 bewiesen.

---

1) Eine Matrix wird untere dreieckige Matrix genannt, wenn alle ihre Elemente, die über der Hauptdiagonale stehen, gleich Null sind.

§ 5. Jetzt beweise ich zwei Sätze über die Funktionen mit den Matrizenargumenten. Über die Funktionen, die M in K abbilden

(5.1) $$F : M \to K$$

gilt der folgende Satz.

Satz 5.1. *Iede Funktion* (5.1), *die gegenüber den Umformungen $T_1 S$ invariant ist, hat die Form*

(5.2) $$F(X) = f(\Delta), \quad \Delta = \operatorname{Det} X,$$

d.h. F ist nur von der Determinante Δ der Matrix X abhängig.

Beweis folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 4.1.

Es ist zu bemerken, daß der Satz 5.1 für die Funktionen F, die auf der ganzen Menge $\tilde{M}$ definiert sind, nicht gilt. Z. B. eine Funktion

$$F = f(\Delta, r),$$

wo $\Delta = \operatorname{Det} X$ ist und r den Rang von X bedeutet, ändert sich bei $T_1 S$ nicht. Sie hängt aber nicht nur von Δ sondern auch von r ab. Die allgemeine Form derjenigen Funktionen ist noch nicht bekannt. Für diese Funktionen gilt der nachstehende Satz.

Satz 5.2. *Es sei F eine Funktion*

(5.3) $$F : \tilde{M} \to K,$$

die den folgenden Bedingungen genügt:

(5.3) *F ist gegenüber den $T_1 S$ invariant,*

(5.5) $$F(B) = \varphi(\varrho) \cdot F(A),$$

falls B aus A mit Hilfe der Umformung $T_2 S$ ensteht. φ ist eine multiplikative Funktion,

(5.6) $$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\xi \cdot \eta), \quad \xi, \eta \in K,$$

die nicht identisch 1 *ist,*

(5.7) $$\varphi \not\equiv 1.$$

Dann muß F die Form

(5.8) $$F(X) = C\varphi(\Delta), \quad \Delta = \operatorname{Det} X,$$

haben, wo C eine beliebige Konstante ist.

Beweis. Zuerst wird vorausgesetzt, daß

(5.9) $$\operatorname{Det} X = \Delta \neq 0$$

ist. Auf Grund des Hilfssatzes 4.1 kann man die Matrix X auf die diagonale Form (4.1) zurückführen. Wegen (5.4) ändert sich dabei der Wert der Funktion F nicht. Wir haben also die Relation

(5.10) $$F(X) = F(D).$$

D entsteht aber, wenn man die letzte Spalte der Einheitsmatrix E mit Δ multipliziert. Aus (5.5) ergibt sich daraus

$$F(D) = \varphi(\Delta) F(E). \tag{5.11}$$

Aus (5.10) und (5.11) folgt (5.8), wenn wir $F(E)$ mit C bezeichnen.

Jetzt nehmen wir an, daß

$$\operatorname{Det} X = \Delta = 0 \tag{5.12}$$

ist. In diesem Falle ist der Rang r von X kleiner als die Anzahl der Spalten $m=n$. Auf Grund des Hilfssatzes 3.1 kann man also X mit Hilfe von $T_1 S$ auf die erste kanonische Form D_1 zurückführen. Da F ändert sich dadurch nicht, erhalten wir die Relation

$$F(X) = F(D_1). \tag{5.13}$$

Aus der Form von D_1 ist es leicht zu sehen, daß ihre letzte Spalte aus lauter Nullen gebildet ist. Bei dem Multiplizieren der letzte Spalte von D_1 mit einer beliebigen Zahl ϱ bleibt also D_1 ungeändert. Wegen (5.5) erhalten wir daraus die Relation

$$F(D_1) = \varphi(\varrho) \cdot F(D_1). \tag{5.14}$$

Die Funktion φ ist aber nicht identisch 1, d.h. es gibt eine Zahl $\varrho_0 \neq 0$ derart, daß

$$\varphi(\varrho_0) \neq 1 \tag{5.15}$$

ist. Aus (5.14), (5.13) und (5.15) ergibt sich

$$F(X) = 0.$$

Die rechte Seite von (5.8) ist aber in diesem Falle gleich Null, weil $\varphi(0)=0$ ist. Die Formel (5.8) ist also auch für die Matrizen mit verschwindender Determinante erfüllt. Auf dieser Weise ist der Satz 5.2 bewiesen.

§ 6. Endlich geben wir eine einfache Folgerung (der Satz 6.1) aus dem Satz 5.2 an. Diese stellt die obenerwähnte Verallgemeinerung des in [7] und in [4] bewiesenen Satzes dar. Der Satz 6.1 ist eine Verallgemeinerung desjenigen von [7] auf die Funktionen der Matrizen beliebiger Ordnung. Die Verallgemeinerung des Satzes von [4] liegt darin, daß die Bedingungen (6.2) und (5.5) in [4] für Spalten und geichzeitig für Zeilen vorausgesetzt wurden. Hier sollen diese nur für Spalten erfüllt sein. Überdies hat die Bedingung (5.5) eine allgemeinere Form als diejenige in [4].

Ein Spezialfall der Umformung $T_1 S$ ist die folgende

$T_1' S$: Addieren (Subtrahieren) eine Spalte zu (von) einer anderen Spalte.

Der Satz 5.2 bleibt aber auch richtig, wenn man in (5.4) die Umformung $T_1 S$ durch $T_1 S$ ersetzt. Dies folgt aus der nachstehenden Bemerkung.

Bemerkung 6.1. (5.4) und (5.5) sind mit (5.5) und (6.2),

(6.2) F ist gegen $T_1 S$ invariant,

äquivalent.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß (5.4) aus (5.5) und (6.2) folgt. Es sei F eine Funktion, die (5.5) und (6.2) erfüllt. Die unten angegebene Rechnung zeigt, daß sie auch (5.4) erfüllt. Wir schreiben die Funktion F in der Form

$$F(X) = F([x_1, \dots, x_n]),$$

wo x_k die k-te Spalte der Matrix X bedeutet.

$$\begin{aligned} F([x_1, \dots, x_n]) &= \varphi\left(\frac{1}{\varrho}\right) F([x_1, \dots, x_i, \dots, \varrho x_j, \dots, x_n]) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{\varrho}\right) F([x_1, \dots, x_i + \varepsilon\varrho x_j, \dots, \varrho x_j, \dots, x_n]) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{\varrho}\right) \varphi(\varrho) F([x_1, \dots, x_i + \varepsilon\varrho x_j, \dots, x_j, \dots, x_n]), \end{aligned}$$

$$F([x_1, \dots, x_n]) = F(x_1, \dots, x_i + \varepsilon\varrho x_j, \dots, x_n]). \tag{6.3}$$

ε ist gleich 1 bzw. -1, je nachdem $T_1'S$ Addieren bzw. Subtrahieren bedeutet.

Da $\varepsilon\varrho$ eine beliebige Zahl sein kann, folgt die Bedingung (5.4) aus (6.3).

Die Bemerkung 6.1 zeigt, daß der Satz 5.2 richtig bleibt, wenn wir die Bedingung (5.4) durch (6.2) ersetzen. Wir erhalten also den Satz 6.1.

SATZ 6.1. *Jede Funktion* (5.3), *welche den Bedingungen* (5.5) *und* (6.2) *genügt, hat die Form*

$$F(X) = C\varphi(\Delta), \qquad \Delta = \operatorname{Det} X,$$

wo C beliebige Konstante ist und φ die im Satz 5.2 *definierte Funktion bedeutet.*

Oben betrachtete ich nur die Umformungen für die Spalten $T_\alpha S$, $\alpha = 1, 2$. Alle hier durchgeführten Betrachtungen und alle hier bewiesenen Sätze bleiben richtig wenn wir die Umformungen $T_\alpha S$ für die Spalten durch diejenigen für die Zeilen $T_\alpha Z$ ersetzen. Die entsprechenden Sätze können leicht formuliert werden.

LITERATUR

[1] E. ARTIN: *Geometric algebra,* New York, London, 1957.

[2] S. GOŁĄB: *Über ein System von Funktionalgleichungen, das in der Geometrie vorkommt,* Konferenz über Funktionalgleichungen, Miskolc, Mai 1966.

[3] M. KUCHARZEWSKI: *Über die Funktionalgleichung* $f(\overset{i}{a_k})f(\overset{i}{b_k}) = f(\overset{i}{b_\alpha}\overset{\alpha}{a_k})$, Publ. Math. Debrecen 6 (1959), 181—198.

[4] M. KUCHARZEWSKI: *Über eine axiomatische Auszeichnung der Determinanten,* Ann. Polon. Math. 20 (1968), 199—202.

[5] M. KUCZMA: *Bemerkung zur vorhergehenden Arbeit von M. Kucharzewski,* Publ. Math. Debrecen 6 (1959), 199—203.

[6] M. KUCHARZEWSKI, A. ZAJTZ: *Über die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus* $[m, n, 1]$, *wo* $m \leqslant n$ *ist,* Ann. Polon. Math. 18 (1968), 205—225.

[7] S. GOŁĄB, M. KUCHARZEWSKI: *Über das Flächenmaß in Vektorräumen,* Prace Mat. (im Druck).

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

KILKA TWIERDZEŃ O FUNKCJACH Z ARGUMENTAMI MACIERZOWYMI

Streszczenie

Oznaczmy przez $\tilde{M}$ zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem K, a przez M jego podzbiór złożony tylko z macierzy nieosobliwych.

Następujące przekształcenia nazywam przekształceniami elementarnymi:

T_1: Pomnożenie dowolnej kolumny macierzy przez dowolną liczbę i dodanie do innej kolumny.

$T_2(\varrho)$: Pomnożenie dowolnej kolumny macierzy przez liczbę ϱ różną od zera.

T_1': Dodanie dowolnej kolumny do innej kolumny.

W pracy udowodnione zostały następujące twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Każda funkcja*

$$F(X): M \to K,$$

która jest niezmiennicza przy przekształceniu T_1 zależy tylko od wyznacznika macierzy X, tzn. ma postać

$$F(X) = f(\Delta), \quad \Delta = \operatorname{Det} X.$$

TWIERDZENIE 2. *Niech F oznacza funkcję*

$$F(X): \tilde{M} \to K,$$

która spełnia warunki;

(1) *F jest niezmiennicza względem T_1.*

(2) *$F(B) = \varphi(\varrho)F(A)$, jożeli macierz B powstaje z macierzy A za pomocą przekształcenia $T_1'(\varrho)$. φ jest funkcją multiplikatywną, nie równą identycznie 1.*

Wtedy F ma postać

$$F(X) = C\,\varphi(\Delta), \quad \Delta = \operatorname{Det} X, \tag{3}$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

TWIERDZENIE 3. *Każda funkcja*

$$F(X): \tilde{M} \to K,$$

która nie ulega zmianie przy przekształceniu T_1' i spełnia warunek (2) *z tw.* 2, *ma postać* (3).

Twierdzenia te pozostają prawdziwe, jeżeli wyraz „kolumna“ zastąpić wyrazem „wiersz“. Można również w przekształceniu T_1' dodawanie zastąpić odejmowaniem.

Oddano do Redakcji 10 maja 1969 r.